Биссектриса

1. Докажите, что в любом треугольнике биссектрисы всех трёх углов пересекаются в одной точке.
2. На биссектрисе угла A треугольника ABC отмечены точки B_1 и C_1 так, что BB_1 и CC_1 перпендикулярны сторонам AB и AC соответственно. Докажите, что середина отрезка B_1C_1 равноудалена от вершин B и C.
3. В треугольнике ABC к стороне AC проведена биссектриса BK. Найдите углы треугольника ABC, если $AK = 1$, а $BK = KC = 2$.
4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ угол $\angle ADC = 30^\circ$ и $BD = AB + BC + AC$. Докажите, что диагональ BD делит угол $\angle ABC$ пополам.
5. В треугольнике ABC угол B равен 20°, угол C равен 40°. Биссектриса AD равна 2. Найдите разность $BC - AB$.
6. В треугольнике ABC углы при вершинах B и C равны 40°, BD – биссектриса угла B. Докажите, что $BD + DA = BC$.
7. На сторонах AB, BC и CA остроугольного треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что если $\angle B_1A_1C = \angle BA_1C_1$, $\angle A_1B_1C = \angle AB_1C_1$, $\angle A_1C_1B = \angle AC_1B_1$, то точки A_1, B_1 и C_1 являются основаниями высот треугольника ABC.
8. Докажите, что, если в треугольнике один угол равен 120°, то треугольник, образованный основаниями его биссектрис, прямоугольный.
9. В треугольнике ABC провели биссектрисы BB_1 и CC_1. Прямая B_1C_1 пересекает прямую BC в точке A_1. Докажите, что прямая AA_1 – биссектриса внешнего угла A треугольника ABC.